Итак, доселе до этого у нас была дана метрика – в данном случае метрика Шварцшильда. А есть ещё метрика Керра для вращаюшихся чёрных дыр и множество других метрик.

А как же всё-таки они получают? Как двензор энергии-импульса вызывает искривление пространства-времени, а как следствие – изменение метрики?

Именно на это отвечают уравнение Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

$$R_k^i - \frac{1}{2} R б_k^i - \Lambda б_k^i = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^i$$

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} - \Lambda g^{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ik}$$

Λ - космологическая постоянна, очень мала. Можете ей пренебречь, положить равной 0.

R_k^i - двензор Риччи, характеризует кривизну пространства-времени в данной точке пространства-времени.

R- скалярная кривизна, свёртка двензора Риччи:

$$R = \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} R_k^i \, R_i^k$$

Стоп, а где же метрика? А она «зашита» двензор Риччи.

Смотрите, какая здесь матрёшка:

Метрический двензор g_{ik} связан с символами Кристоффеля Γ_{pq}^n

Символы Кристоффеля связаны с тензором кривизны Римана R_{km}^{il}

Двензор Риччи – это свёртка Римана;

Скалярная кривизна R – это свёртка Риччи.

Как уравнение Эйнштейна выводятся?

Записываем действие:

$$S_{g-field} = \int R \sqrt{-detg} d^4 x$$

Прежде чем обсудим физический/геометрический смысл, хочу подчеркнуть на отличие этого действия от того, что было раньше:

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \frac{ds}{dct} dct$$

или

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\sum_{l=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} g_{lm} \frac{dx^l}{d\sigma} \frac{dx^m}{d\sigma}} d\sigma$$

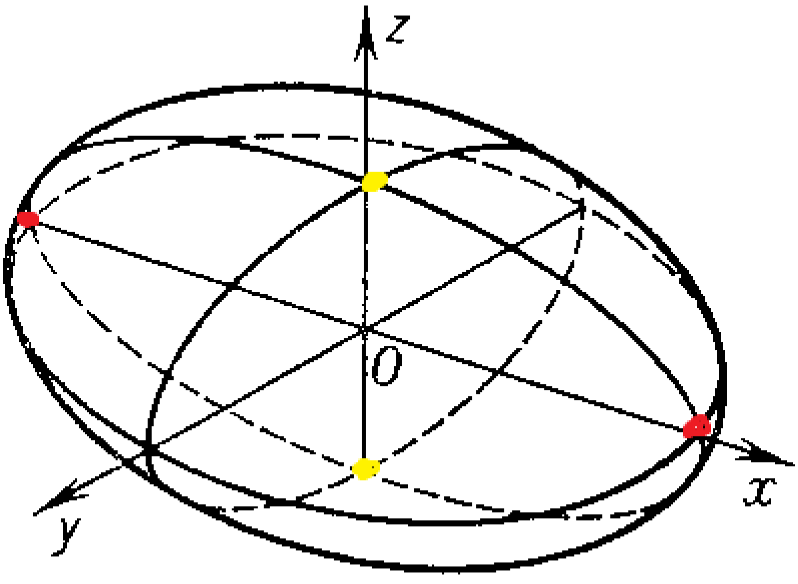
Там мы интегрировали по кривой! У нас была одна частица с её траекторией, по ней и проходило интегрирование.
Здесь же мы интегрируем по d^4x - по элементу 4-объёма! Точнее - $\sqrt{-detg}d^4x$. Вот, например, рассмотрим декартову СК. Там $\sqrt{-detg} = 1$, и $\sqrt{-detg}d^4x = d^4x = dctdxdydz$ - 4-объём.
В цилиндрической СК $\sqrt{-detg} = r$, и $\sqrt{-detg}d^4x = rdctdrd\varphi dz$ - вновь объём.
Можно сказать, что $\sqrt{-detg}$ является якобианом.

Таким образом,

$$S_{g-field} = \int R \sqrt{-detg} d^4x$$

- это интеграл от скалярной кривизны по всему пространству-времени

Когда речь идёт о двумерных поверхностях в 3D, мы себе примерно представляем, что такое эта скалярная кривизна. Скажем, у эллипсоида



максимальная кривизна в красных точках, а минимальная в жёлтых.

Действие

$$S_{g-field} = \int R \sqrt{-detg} d^4x$$

можно трактовать как суммарная кривизна пространства-времени.

И если это уравнение проварьировать, то через спустя пару часов танцов с бубном получим уравнения Эйнштейна
У них три формы:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

$$R_k^i - \frac{1}{2} R б_k^i - \Lambda б_k^i = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^i$$

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} - \Lambda g^{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ik}$$

Очевидно, они все получаются друг из друга свёрткой с метрическим двензором.
Конечно, самая простая – вторая:

$$R_k^i - \frac{1}{2} R б_k^i - \Lambda б_k^i = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^i$$

Понятно, почему самая простая – она не содержит метрический двензор. А мы помним, что он неприятный в том плане, что характеризует «кривость» системе координат, а не пространства-времени.

Тензорное уравнение

$$R_k^i - \frac{1}{2} R б_k^i - \Lambda б_k^i = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^i$$

можно разбить на два – для недиагональных элементов и диагональных:

$$i! = k => R_k^i = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^i$$

$$R_k^k - \frac{R}{2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^k$$

Не путать только R_k^k и T_k^k со свёрткой – если бы это была бы свёртка, я бы поставил знак суммы. Это просто обозначение для диагональных элементов.
Для диагональной матрицы $R = \sum_{k=0}^{3} \left(R_k^k\right)^2$

Следствие: если ТЭИ T_k^i в данной СК имеет диагональный вид, то и двензор Риччи R_k^i также будет диагональным.

Пример:
T_k^i имеет такой простой вид:

$$\begin{matrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Что соответствует равномерному заполнению материей с объёмной плотностью энергии w.
Тогда
$R_0^0 - \frac{R}{2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 = \frac{8\pi G w}{c^4}$ для k=0
$R_k^k - \frac{R}{2} - \Lambda = 0$ для остальных k.
(Диагональные компоненты, очевидно, будут 0).
Очевидно, что $R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = q$, а R_0^0 обозначим за p.
Тогда $R = p^2 + 3q^2$

$$\begin{cases} p - \frac{p^2 + 3q^2}{2} - \Lambda = \frac{8\pi G w}{c^4} \\ q - \frac{p^2 + 3q^2}{2} - \Lambda = 0 \end{cases}$$

Решаем:

$$\begin{cases} p - q = \frac{8\pi G w}{c^4} \\ q - \frac{p^2 + 3q^2}{2} - \Lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = q + \frac{8\pi G w}{c^4} \\ q - \frac{4q^2 + 2q\left(\frac{8\pi G w}{c^4}\right) + \left(\frac{8\pi G w}{c^4}\right)^2}{2} - \Lambda = 0 \end{cases}$$

Для простоты вычислений положим $\Lambda = 0$. Тогда

$$\frac{4q^2 + 2q\left(\frac{8\pi G w}{c^4}\right) + \left(\frac{8\pi G w}{c^4}\right)^2}{2} = q$$

Пренебрежём $\left(\frac{8\pi G w}{c^4}\right)^2$ в силу его малости. Тогда

$$\frac{4q^2 + 2q\left(\frac{8\pi G w}{c^4}\right)}{2} = q$$

$$2q + \frac{8\pi G w}{c^4} = 1$$

$$q = \frac{1 - \frac{8\pi G w}{c^4}}{2}$$

$$p = q + \frac{8\pi G w}{c^4} = \frac{1 + \frac{8\pi G w}{c^4}}{2}$$

Обратите внимания, что при w->0 p и q стремятся к ½.

А если T_k^i в какой-то точке равен 0, то кривизны в этой точке нет?

$$R_k^i - \frac{1}{2} R б_k^i \ - \Lambda б_k^i = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^i = 0$$

Давайте пренебрежём космологической постоянной:

$$R_k^i - \frac{1}{2} R б_k^i \ = 0$$

Сразу видно тривиальное решение: $R_k^i = 0$. Ну что, получается, если в данной точке пространства-времени нет ТЭИ – то и кривизны нет?

А вот и нет. Кривизну ПОЛНОСТЬЮ описывает другой тензор – кривизны Римана:

$$R_{km}^{il}$$

Вот если он =0 (т.е. =0 его 256 компонент) в какой-то точке, то пространство-время в этой точке действительно неискривлено. Точнее, если мы выйдем в пятимерное пространство, мы можем увидеть какую-то кривизну, но в 4D мы о ней никогда не узнаем (вспомните пример с цилиндром – двумерный наблюдатель никогда не узнает, что он живёт на цилиндре). Можно сказать, что тензор кривизны Римана несёт в себе всю информацию о кривизне пространства-времени, которую мы, четырёхмерные, можем теоретически узнать.

Интересно, что в для полного описания кривизны кривой в R^2 и поверхности в R^3 хватило одной скалярной кривизны. Для описания кривизны трёхмерного пространства в R^4 уже потребуется двензор Риччи R_k^i, а для искривлённого четырёхмерного пространства-времени – уже R_{km}^{il}. Чем дальше в лес – тем толще партизаны…

Так, для метрики Шварцшильда во всех точках, кроме центра, хотя $T_k^i = 0$, , как следствие, R_k^i =0, тензор кривизны Римана R_{km}^{il} отнюдь не 0.

Решение уравнений Эйнштейна обычно представляет БОООООЛЬ. Ну вы посудите, как выводит метрику Шварцшильда Ландау-Лифшиц:

1) Получает заготовку для метрики с двумя неизвестными параметрами
2) Считает все кристофели (их 40 в общем случае)
3) Считает все компоненты тензора кривизны Римана (их вообще дофига)
4) Сворачивает, получает Риччи
5) Его наконец подставляет в уравнение Эйнштейна, находит неизвестные параметры

☺☺☺

Типичный курс по ОТО предполагает длинный рассказ про кристоффели-Римана-Риччи (обычно ещё ковариантную производную к этому увлекательному списку добавляют). И всё это для того, чтобы вы научились получать метрики. В реальности это очень долгий процесс (не забывайте, что метрика Шварцшильда – самая простая!), и проще пользоваться готовыми формулами.
Вот, например, посмотрите на метрику Керра для заряженных и вращающихся чёрных дыр:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\,Mr - Q^2}{\Sigma}\right)\,dt^2 - 2(2\,Mr - Q^2)a\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\,dt\,d\varphi + \\ + \left(r^2 + a^2 + \frac{(2\,Mr - Q^2)a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\,d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\,dr^2 + \Sigma\,d\theta^2,$$

~~Видите, как она прекрасна?~~ Уберите этот ужас поскорее!

И вся ОТО разбивается на
1) Дооолгий и очень скучный подсчёт метрики, требующий знания дифгема
2) Нахождение геодезической в метрике, также скучным подсчётом, но уже не таким долгим.

Для меня наибольшим разочарованием в ОТО стала именно сложность расчётов.
На этой печальной ноте и я хочу закончить свой рассказ про ОТО.